40 I. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Représenter la restriction de f à $[-\pi,3\pi]$.

b. Soit A et B deux points distincts de C_f. Montrer que le coefficient directeur de la droite (AB) est compris entre -1 et 1.

II. Soit la fonction $g : x \mapsto \sin(\sin x)$ et C_g sa courbe représentative.

1. a. Montrer que 2π est une période de g.

b. Montrer que g est impaire.

c. Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$.

d. Représenter la restriction de g à $[-\pi,2\pi]$.

41 I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x^2 - x|}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que C_f admet deux branches paraboliques dont on précisera les directions.

2. a. Montrer que f est dérivable en 0.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement le résultat.

3. a. Etudier les variations de f.

b. Tracer C_f.

4. Soit g la restriction de f à $[0,1]$, déterminer les extrema locaux de g.

II. Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe C_n est au dessous de la courbe C_1.

2. a. Etudier la dérivabilité de g_n à droite en 0 et à gauche en 1.

b. Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $]0,1[$ et que $g_n'(x) = \dfrac{x^n\left(n+\frac{1}{2}-(n+1)x\right)}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in]0,1[$.

c. En déduire que pour tout entier non nul n, la fonction g_n admet un maximum local α_n que l'on précisera.

d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = g_n(\alpha_n)$, $n \geq 1$.

a. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq g_1(\alpha_n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

42 1. Montrer que l'équation $(E) : x^3 - 10x^2 - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution a et vérifier que $a \in]10,11[$.

2. Vérifier que (E) est équivalente à $x = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.

3. Soit f la fonction définie sur $[10,+\infty[$ par $f(x) = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.

a. Déterminer $f([10,+\infty[)$.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{500}|u_n - a|$.

Déterminer les six premières décimales de a.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn